УДК 517.9

ФРЕЙМОВЫЕ СВОЙСТВА ЯДРА СЕГЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

К.С. Сперанский[1], П.А. Терехин[2]

1 *konstantin.speransky@yahoo.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
2 *terekhinpa@mail.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Установлено, что последовательность $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $K_\zeta(z) = (1-\bar{\zeta}z)^{-1}$ — *ядро Сеге пространства Харди* $H^2(\mathbb{D})$, *является фреймом в* $H^2(\mathbb{D})$ *относительно* банахова *модельного пространства при выполнении некоторых условий на последовательность* $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *попарно различных точек единичного круга* $\mathbb{D}$.

Ключевые слова: банахов фрейм, модельное пространство фрейма, воспроизводящее ядро, пространство Харди.

Банахово пространство X, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется *модельным*, если система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X. Сопряженное пространство X^* к модельному пространству X изометрически изоморфно банахову пространству Y, состоящему из числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Соответствующий изоморфизм дается равенством $y_n = (e_n, x^*)$, $n = 1,2,\ldots$, где $x^* \in X^*$, причем $\|y\|_Y := \|x^*\|_{X^*}$. Далее X — модельное пространство.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется *фреймом в F относительного X*, если существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для каждого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \le \|\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|g\|_G.$$

Если $F = G = H$ — гильбертово пространство и $X = Y = \ell^2$, то фрейм в H относительно ℓ^2 в смысле предыдущего определения совпадает с “обычным” фреймом Даффина–Шеффера [1].

Всякий фрейм $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в F относительно X является *системой представления*, т.е. для любого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что (см. [2])

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n.$$

Верно и обратное: произвольная система представления $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ образует фрейм в F относительного (вообще говоря, неединственного) модельного пространства X.

Пусть $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ — пространство Харди, состоящее из всех аналитических функций $f(z)$, $z \in \mathbb{D} = (|z| < 1)$, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Хорошо известно, что пространство H^2 является *функциональным гильбертовым пространством*, т.е. обладает *воспроизводящим ядром*

$$f(\zeta) = (f, K_\zeta), \qquad K_\zeta(z) = \frac{1}{1-\bar{\zeta} z}, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

которое называется ядром Сеге (или ядром Коши).

Пусть $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность попарно различных точек единичного круга $\mathbb{D}$. Классическая задача восстановления аналитической функции по ее значениям в данных точках заключается в (однозначном) определении $f(\zeta)$ для произвольного $\zeta \in \mathbb{D}$ по известным значениям $f(\zeta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Заметим, что сама возможность такого восстановления существенным образом зависит от выбора пространства функций (см., например, [3]). Здесь мы рассматриваем пространство Харди H^2.

Во-первых, необходимым условием положительного решения задачи восстановления является отрицание условия Бляшке

$$\sum_{n=1}^\infty (1 - |\zeta_n|) = \infty, \tag{1}$$

так как в противном случае произведение Бляшке $B(z) = \prod_{n=1}^\infty \frac{\bar{\zeta}_n}{|\zeta_n|} \frac{\zeta_n - z}{1-\bar{\zeta}_n z}$ сходится, $B \in H^2$, $B \neq 0$, но при этом $B(\zeta_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Во-вторых, как следует из теоремы Тотика [4], для каждой последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющей условию (1), существует такое семейство многочленов $p_{n,k}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, n$, что для всех $f \in H^2$ справедливо представление

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) p_{n,k},$$

что решает задачу восстановления.

Возникает естественный вопрос: возможно ли представление произвольной функции $f \in H^2$ в виде ряда

$$f = \sum_{n=1}^\infty x_n K_{\zeta_n}$$

по элементам системы функций $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ с некоторыми коэффициентами $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ (вообще говоря, нелинейно зависящими от f) или, эквивалентно, является ли последовательность ядер Сеге $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ фреймом в H^2 относительно некоторого модельного пространства X? Ясно, что если такое представление возможно, то полагая в нем $f = K_\zeta$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и умножая скалярно на $g \in H^2$, получаем формулу восстановления (в которой $x_n = x_n(\zeta)$)

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^\infty \bar{x}_n g(\zeta_n).$$

Однозначность такого восстановления (единственность g) обеспечивается тем, что каждый фрейм является полной системой.

Покажем, что ответ на поставленный вопрос будет положительным при выполнении дополнительных условий на $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$. А именно, предположим, что последовательность “радиусов” $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условиям

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < r_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1, \tag{2}$$

и последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что

$$\frac{a}{N_k} \le 1 - r_k \le \frac{b}{N_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

для некоторых постоянных $0 < a \le b < \infty$. Рассмотрим последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ специального вида

$$\zeta_n = \zeta_{k,j} = r_k e^{2\pi i j / N_k}, \qquad j = 0, \ldots, N_k - 1, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. объединение k-блоков, состоящих из точек $\{\zeta_{k,j}\}_{j=0}^{N_k-1}$, равномерно распределенных на окружности $|z| = r_k$.

Наконец, в качестве модельного пространства X рассмотрим пространство $\ell^{1,2}$, состоящее из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{k,j} : k \ge 1, 0 \le j \le N_k - 1\}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{1,2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N_k} \sum_{j=0}^{N_k-1} |x_{k,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Теорема. *При выполнении условий* (2) *и* (3) *последовательность* $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *образует фрейм в пространстве Харди* H^2 *относительно модельного пространства* $\ell^{1,2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

1. Duffin R. J., Schaeffer A. C. *A class of nonharmonic Fourier series* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1952. – Vol. 72. – P. 341–366.

2. Терехин П. А. *Фреймы в банаховом пространстве* // Функц. анализ и его прил. – 2010. – Т. 44. – № 3. – С. 50–62.

3. Partington J. R. *Interpolation, Identification, and Sampling*. – Oxford: Clarendon Press, 1997. – 288 p.

4. Totik V. *Recovery of H^p functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – Vol. 90. – No. 4. – P. 531–537.

FRAME PROPERTIES OF THE SZEGÖ KERNEL FOR THE HARDY SPACE

K.S. Speransky, P.A. Terekhin

Let $K_\zeta(z) = (1 - \bar{\zeta} z)^{-1}$ *be the Szegö kernel for the Hardy space* $H^2(\mathbb{D})$. *We prove that under certain conditions on points* $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *the sequence* $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *is a frame in* $H^2(\mathbb{D})$ *with respect to some* Banach *modeling space.*

Keywords: Banach frame, modeling space, reproducing kernel, Hardy space.